Colegiul Național "Mircea cel Bătrân" Constanța

Concursul Național de Matematică "N. N. Mihăileanu"

Ediția a XVII-a, 28 mai 2016

Clasa a XI-a

Subiectul 1

Fie $n \in \mathbf{N}, n \geq 3$, număr impar și $A \in M_n(\mathbf{C})$, o matrice cu proprietatea că $I_n - A$ și $I_n + A$ sunt inversabile iar inversa matricei $(I_n - A)\cdot(I_n + A)^{-1}$ este egală cu transpusa acesteia. Să se arate că:

i) $A + {}^tA = O_n$;

ii) Matricea A nu este inversabilă.

Cătălin Zîrnă

Subiectul 2

Se consideră funcția $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, periodică, derivabilă, cu derivata continuă. Să se arate că există un șir de numere reale $(x_n)_{n \in N}$, astfel încât:

i) $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = +\infty$;

ii) $f'(x_n) = 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$;

iii) $\lim\limits_{n \to \infty} f'\left(\frac{x_n}{n}\right) = f'(0)$

Gabriela Constantinescu

Subiectul 3

Determinați funcția $f : (0, +\infty) \to \mathbf{R}$, știind că $f'(x) = \left(2x + \frac{1}{x}\right)\cdot f(x) + e^{x^2}$, $\forall x \in (0, +\infty)$ și $f(1) = e$.

Cătălin Zîrnă

Subiectul 4

Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația $e^{\sin x} + e^{\cos x} = e + 1$.

Marius Cavachi

Notă. Timp de lucru: 3 ore.
Toate subiectele sunt obligatorii.
Fiecare problemă are 7 puncte.